Лекция 6. Жазықтықтағы екінші ретті сызықтар

Екінші ретті сызық деп 2-ші дәрежелі теңдеуімен анықталатын сызықты айтамыз және оны жалпы түрде былай жазуға болады:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

(1) теңдеудің коэффициенттерінен тұратын екі анықтауышты құрамыз:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},\ \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Δ анықтаушыты (1) теңдеудің дискриминанты деп атайды, ал δ - үлкен мүшелерден құралған дискриминанты деп атайды.

δ және Δ шамаларына байланысты (1) теңдеу келесі геометриялық кескінің анықтайды:

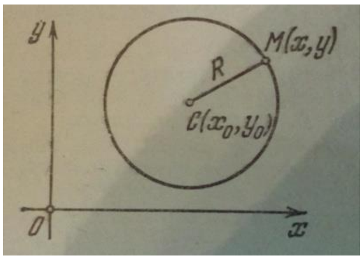
	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс (нақты немесе жорамал)	Нүкте
$\delta < 0$	Гипербола	Қиылысатын сызықтар жұбы
$\delta = 0$	Парабола	Параллель сызықтар жұбы (нақты немесе жорамал)

Шеңбердің теңдеуі. Берілген $C(x_0, y_0)$ нүктеден R қашықтықта орналасқан жазықтықтың барлық нүктелерінің жиыны шеңбер деп атайды және ол келесі теңдеумен беріледі :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Егер шеңбердің центрі координаталар басымен сәйкес келсе, яғни $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, онда теңдеуді келесі түрде жазуға болады:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (3)$$



Мысал 1. Центрі $M(3; 2)$ нүктесінде орналасқан және $D(5; 3)$ нүктесінен өтетін шеңбердің теңдеуін табыңыз.

$$R = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$$

Эллипстың теңдеуі. Фокустары деп аталатын берілген екі нүктеден ара қашықтықтарының қосындысы тұрақты санға тең болатын жазықтық нүктелерінің жиыны *эллипс* деп аталады.

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ нүктелер эллипстің фокустары. $|F_1F_2| = 2c$ - фокустардың ара қашықтығы. Эллипстің кез келген $M(x,y)$ нүктесін алайық. Эллипстің анықтамасы бойынша $|F_1M| + |F_2M| = 2a$

$$\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2 = \left[2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2;$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$[a^2 - cx]^2 = \left[a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2;$$

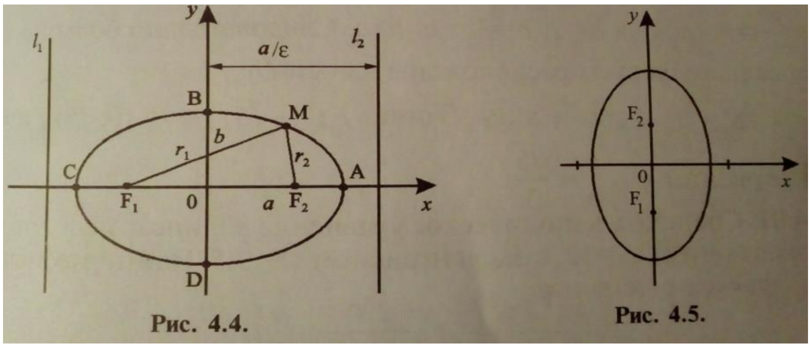
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

мұндағы $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ немесе $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$.

a - үлкен жарты осі, b - кіші жарты осі, $\varepsilon = c/a < 1$ - эллипстің эксцентриситеті,

$r_1 = |F_1M| = a + \varepsilon x$ and $r_2 = |F_2M| = a - \varepsilon x$ - фокустық радиустар

$x = -a/\varepsilon$, $x = a/\varepsilon$ түзулері - эллипстің директрисалары.



Егер $b > a$, фокустар Оy осте орналасады және $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = c/b$, $r = b \pm \varepsilon y$

Егер $a = b$, онда теңдеу шеңберді анықтайды.

Мысал 2. Эллипстің центрін, төбесін және фокустарын табыңыз

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$$

Шешуі :

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 + 36y) = -4;$$

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = -4 + 4 + 36;$$

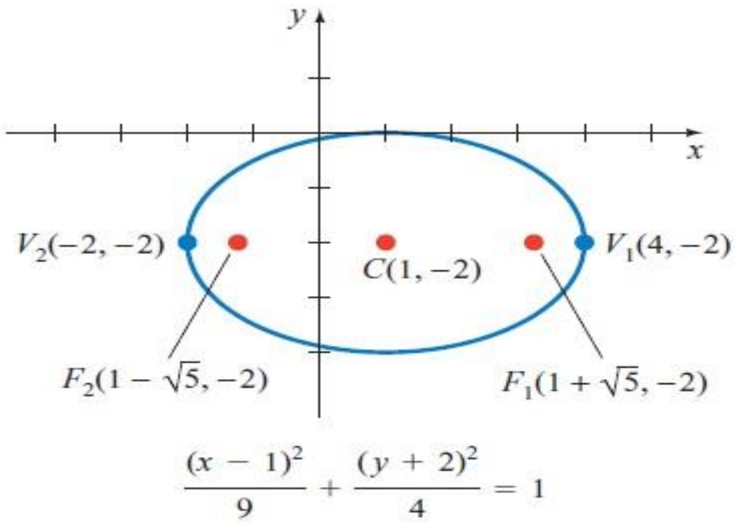
$$4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36;$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Hence $a = 3$ and $b = 2$. The vertices are $(-4, -2)$, $(-2, -2$.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5; \Rightarrow c = \sqrt{5}.$$

$$F_1 = (1 + \sqrt{5}, -2) \quad F_2 = (1 - \sqrt{5}, -2).$$



Гипербола теңдеуі. Фокустары деп аталатын берілген екі нүктеден ара қашықтықтарының айырмасының модулі тұрақты санға тең болатын жазықтық нүктелерінің жиыны *гипербола* деп аталады .

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ - фокустар. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ - гиперболаның төбелері. $|F_1F_2| = 2c$ - фокустардың ара қашықтығы. Кез келген $M(x,y)$ нүктесін алайық. Гиперболаның анықтамасы бойынша $\left||F_1M| - |F_2M|\right| = 2a$. Теңдеу мына түрде жазылады :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

мұндағы $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ немесе $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

a - нақты жарты осі, b - жорамал жарты осі.

$\varepsilon = c/a > 1$ - гиперболаның эксцентриситеті

$r_1 = |F_1M| = |\varepsilon x + a|$ және $r_2 = |F_2M| = |\varepsilon x - a|$ - фокустық радиустар.

$y = \pm\frac{b}{a}x$ түзулері - гиперболаның асимптоталары.

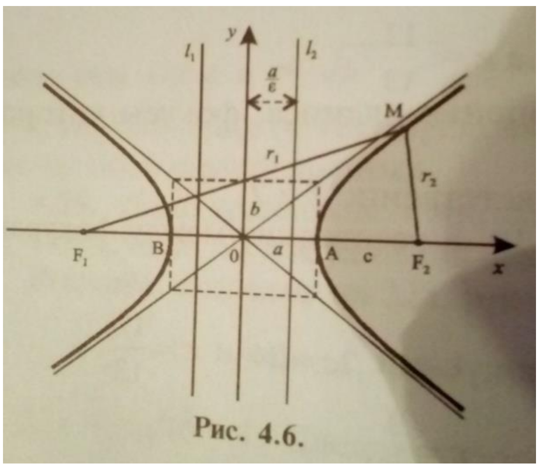


Рис. 4.6.

Егер фокустар *Oy* осінде орналасса, онда гиперболаның канондық теңдеуі былай жазылады:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

мұндағы b - нақты жарты осі, a - жорамал жарты осі.